A M' che li congiungono con uno dei vertici del triangolo fondamentale. Dal precedente teorema consegue che tutù i punti della retta *A M* hanno i loro corrispondenti sulla retta *A M'* e reciprocamente ; esse inoltre sono coniugate armonicamente rispetto ai due lati del quadrangolo concorrenti in *A,* dunque:

Se uno qualunque dei vertici del triangolo fondamentale si congiunge mediante rette con un numero qualsivoglia di punti del piano, corrispondenti fra i or o a due a due, si determina un fascio in involuzione. Le rette doppie di questa involuzione sono i due lati opposti del quadrangolo concorrenti in quel punto, e sono rette corrispondenti di essa quelle che passano per due punti corrispondenti.

In altre parole le rette doppie sono quelle che vanno dal vertice del triangolo ai quattro punti doppi del piano, punti che sono a due a due in linea retta col vertice medesimo.

Mediante il teorema precedente si vede facilmente quali sieno i punti corrispondenti di quei punti del piano per i quali una o due delle coordinate son nulle, ciò che non bene risulta dalle forinole (7). È chiaro infatti che :

i° *A ciascun punto di uno dei lati del triangolo fondamentale corrisponde il vertice opposto,* giacche l'angolo di due lati del triangolo è diviso armonicamente dai due lati del quadrangolo concorrenti nel suo vertice.

2° *A ciascun vertice corrisponde un punto arbitrano del lato opposto.*

Da ciò segue che ad ogni retta passante per un vertice *A* del triangolo fondamentale corrisponde propriamente il sistema di due rette. Una è quella che si menziona in un precedente teorema, l'altra o il lato *B C,* opposto al vertice *A* per il quale è condotta la retta. Ma siccome questa seconda retta non o che il luogo dei punti corrispondenti all'unico punto *A,* cosi se si fa astrazione da questo, si può ritenere che il luogo dei punti corrispondenti ai punti della retta sia una retta unica, determinata come s'è detto.

IX.

In virtù del teorema relativo all'involuzione delle rette condotte da un vertice del triangolo a più coppie di punti corrispondenti, diventa sommamente facile risolvere qualunque problema relativo alla trasformazione che abbiamo di mira.

Ed intorno a questa fa d'uopo osservare primieramente ch'essa può considerarsi sotto due aspetti, secondo che la si riguardi come generata geometricamente coll'ajuto del quadrangolo, o come definita analiticamente dalle equazioni (7). Tanto nell'una ipotesi quanto nell'altra essa dipende da otto costanti arbitrarie che sono, nel primo caso le coordinate dei quattro vertici del quadrangolo, nel secondo i parametri delle rette diesi assumono come lati del triangolo fondamentale e i due rapporti $a^2 : b^2 : e^2$.